Zur Anwendung des Variationsprinzips in der allgemeinen Relativitätstheorie.

Von Kornel Lanczos in Frankfurt a/M.

Bekanntlich können die Einsteinschen Feldgleichungen der Gravitation aus einem Wirkungsprinzip abgeleitet werden, indem man die Variation eines bestimmten Wirkungsintegrals gleich Null setzt. Soweit es sich um die Feldgleichungen im Vakuum handelt, ist das in Frage kommende Wirkungsprinzip von rein geometrischer Natur. Man hat als Integranden des Wirkungsintegrals einfach die skalare Riemannsche Krümmung R zu nehmen, bezw. noch eine universelle Konstante λ hinzuzufügen, um die „kosmologischen" Gleichungen Einsteins zu finden.

Das Wirkungsprinzip lautet also:

$$\delta I = \delta \int (R + \lambda)\, dv = 0 \tag{1}$$

wenn mit dv das Volumelement bezeichnet wird. Zu variieren sind dabei die g_{ik} Komponenten des metrischen Fundamentaltensors, die als gegebene Funktionen von 4 Koordinaten zu gelten haben. Damit wir für das Folgende einen besseren Anhalt haben, sei die kleine Rechnung auch explizite angeführt. Für die Variation der g_{ik} wollen wir die Bezeichnung γ_{ik}, für die Variation der R_{ik} die Bezeichnung ϱ_{ik} einführen, setzen also:

$$\begin{aligned} \delta\, g_{ik} &= \gamma_{ik} \\ \delta\, R_{ik} &= \varrho_{ik} \end{aligned} \tag{2}$$

Nun haben wir für die Variation des Integranden:

$$\delta R = \delta\, R_{ik}\, g^{ik} = g^{ik}\, \delta\, R_{ik} + R_{ik}\, \delta\, g^{ik} \tag{3}$$

Indem wir die Gleichung:

$$g^{is}\, g_{ks} = \eta_k^i \tag{4}$$

(η_k^i der gemischte Einheitstensor) variieren, können wir die Variation der g^{ik} leicht auf die Variation der g_{ik} zurückführen und finden:

$$\delta g^{ik} = -g^{ir} g^{ks} \delta g_{rs} = -\gamma^{ik} \tag{5}$$

Es wird also die Variation von R:

$$\delta R = g^{ik} \varrho_{ik} - R^{ik} \gamma_{ik} \tag{6}$$

Ausserdem sind die g_{ik} auch im Volumelement dv enthalten, denn es ist ja:

$$dv = \sqrt{g}\, d x_1 \ldots d x_4 \tag{7}$$

und somit:

$$\delta dv = \delta \sqrt{g}\, d x_1 \ldots d x_4 = \frac{\delta \sqrt{g}}{\sqrt{g}} dv = \frac{1}{2} (\gamma_{ik} g^{ik})\, dv \tag{8}$$

Die gesamte Variation unseres Wirkungsintegrals können wir also nunmehr folgendermassen hinschreiben:

$$\delta I = \int \varrho_{ik} g^{ik} dv - \int [R^{ik} - \frac{1}{2} (R + \lambda) g^{ik}]\, \gamma_{ik}\, dv \tag{9}$$

Der Ausdruck für ϱ_{ik} — also die Veränderung der Krümmungskomponenten bei einer unendlich schwachen Deformation des metrischen Feldes — wird in der Theorie der unendlich schwachen Felder abgleitet. Ich habe ihn in der Formel (16) einer anderen Arbeit explizite angegeben.[1]) Bilden wir an Hand dieser Formel den Skalar $\varrho_{ik} g^{ik}$, so erkennen wir leicht, dass nur die beiden ersten Terme von 0 verschieden übrig bleiben, da die letzten 3 Terme sich in ihrer Summe aufheben. Die in Frage kommenden Terme lassen sich aber in Form einer Divergenz eines Vektors hinschreiben und bekanntlich kann dann unmittelbar die Gauss-sche Integraltransformation angewandt werden. Das erste Volumenintegral lässt sich also in ein Randintegral umwandeln. Betrachten wir den vorgegebenen Bereich der ganzen Welt als eine endliche, in sich geschlossene, randlose Mannigfaltigkeit, so fällt dieses Integral überhaupt weg, falls wir noch hinzufügen, dass die g_{ik} samt ihren ersten Ableitungen überall stetige Funktionen der Koordinaten seien.

Was uns also im weiteren überhaupt interessiert, ist nur das zweite Integral der Gleichung (9), also:

$$\delta I = -\int [R_{ik} - \frac{1}{2} (R + \lambda) g_{ik}]\, \gamma^{ik}\, dv \tag{10}$$

[1]) „Zum Problem der unendlich schwachen Felder in der Einsteinschen Gravitationstheorie", ZS. f. Physik, *31*, 112—132, 1915, S. 117.

Betrachten wir nun die γ_{ik} als frei wählbare Funktionen, — abgesehen von den allgemeinen Stetigkeitsbedingungen, — so muss offenbar der Faktor von γ_{ik} verschwinden und auf diese Weise gelangen wir, wie üblich, zu den Gleichungen:

$$R_{ik} - \frac{1}{2}(R + \lambda) g_{ik} = 0 \tag{11}$$

oder, wie wir auch sagen können, zu der Gleichung:

$$T_{ik} = 0 \tag{12}$$

wenn T_{ik} den Tensor der Materie bedeutet. Nach der EINSTEINschen Theorie besteht nämlich zwischen dem Krümmungstensor und dem Materietensor ganz allgemein folgender Zusammenhang:

$$T_{ik} = \varkappa \left[R_{ik} - \frac{1}{2}(R + \lambda) g_{ik}\right], \tag{13}$$

wo $\varkappa$ eine universelle, von der Wahl der Masseinheiten abhängige Konstante bedeutet. Wir können sie bei entsprechender Wahl der Masseneinheit auch $= 1$ setzen.

So scheint uns also ein rein geometrisches Wirkungsprinzip nur die Feldgleichungen für das reine Vakuum ergeben zu können und für das Innere der Materie, insbesondere auch für das elektromagnetische Feld, keine Anhaltspunkte zu gewähren. Bekanntlich hat man sich aus diesem Grunde veranlasst gefühlt, die allgemeinen Grundlagen der RIEMANNschen Geometrie zu erweitern, von dem Wunsche geführt, auch für die elektromagnetischen Felder eine geometrische Interpretation zu finden (WEYL, EDDINGTON, EINSTEIN).

Wir wollen nun in Bezug auf die freie Variation der g_{ik} auf einen Umstand hinweisen, der noch nicht bemerkt zu sein scheint, obwohl ihm u. E. eine grosse Tragweite zukommt und auch für das Problem des Vektorpotentials einen ganz neuen, im Wesen der Sache begründeten Gesichtspunkt liefert.

Denken wir uns die gegebenen x_i Koordinaten durch eine unendlich schwache Transformation in neue: x_i' übergeführt, indem wir setzen:

$$x_i' = x_i + \varepsilon f_i (x_1 \ldots x_4) \tag{14}$$

Es wird dann offenbar das Linienelement nur unendlich wenig modifiziert: die neuen g_{ik}' sind von den g_{ik} nur unendlich wenig verschieden. Eine leichte Rechnung zeigt, dass wir haben:

$$g_{ik}' = g_{ik} + \varepsilon \left(\frac{\partial f_s}{\partial x_i} g_{sk} + \frac{\partial f_s}{\partial x_k} g_{si} \right) \tag{15}$$

Offenbar können wir diese Modifikation auch als eine mögliche Variation der g_{ik} betrachten, wobei hier zu setzen ist:

$$\gamma_{ik} = \varepsilon \left(\frac{\partial f_s}{\partial x_i} g_{sk} + \frac{\partial f_s}{\partial x_k} g_{si} \right). \tag{16}$$

Nun würde man im ersten Augenblick meinen, dass durch eine blosse Transformation der Koordinaten sicher keine Modifikation des Wirkungsintegrals eintreten kann. Sowohl der Integrand, wie auch das Volumelement sind ja invariant gegenüber Transformationen, also muss es auch das Integral sein. Betrachten wir aber andererseits die Formal (10), so erkennen wir, dass für die Variation des Integrals die spezielle Form (16) der γ_{ik} durchaus keine exzeptionelle Rolle spielt und dass sehr wohl ein von 0 verschiedenes Resultat herauskommen kann. Der Grund für diesen scheinbaren Widerspruch ist in folgendem zu suchen.

Führen wir in unserem Wirkungsintegral irgend welche neue Koordinaten ein, so bekommen wir das Integral:

$$\int (R' + \lambda)\, dv'$$

wo der Strich andeuten soll, dass die neuen Koordinaten eingesetzt wurden. Es ist offenbar:

$$\int (R' + \lambda)\, dv' = \int (R + \lambda)\, dv \tag{17}$$

wobei aber diese Gleichung zur Voraussetzung hat, dass die Integrale links und rechts über *entsprechende* Gebiete erstreckt werden, also beim Integral linker Hand Grenzen einzusetzen sind, die den neuen Variabeln entsprechen. Berechnen wir aber die Differenz der beiden Integrale, *aufgefasst als Variation,* so bilden wir den Ausdruck:

$$\int [(R' + \lambda)\, dv' - (R + \lambda)\, dv]$$

und integrieren hierbei über den *alten* Bereich der Variabeln. Wir bilden also hier das erste Integral nicht für den neuen Bereich der transformierten Variabeln, sondern für den ursprünglichen. Dann ergibt sich natürlich eine Variation des Wirkungsintegrals, aber offenbar nicht als Folge davon, als hätten wir den Integranden variiert, sondern allein durch eine *Variierung der Grenzen des Bereiches.*

Wir kommen somit zu folgendem interessanten Resultat. *In einer freien Variation der g_{ik} sind zwei wesentlich von einander* *verschiedene Prozesse gemeinsam enthalten. Einerseits eine wirkliche Variation des Integranden, andererseits eine blosse Variation der Integrationsgrenzen.*

Wir haben es also, um zur Erläuterung ein Beispiel anzuführen, mit einem analogen Fall zu tun, als suchten wir die kürzeste Entfernung zwischen zwei Punkten, wobei aber auch noch die Lage des einen Endpunktes variiert werden müsste. Eine solche Forderung geht offenbar zu weit. In allen Anwendungen des HAMILTONschen Prinzips in der Physik sind wir gewohnt, die Variation des Wirkungsintegrals unter Voraussetzung eines *festen*, vorgegebenen Gebietes auszuführen. Auch bei der Anwendung des HAMILTONschen Prinzips in der allgemeinen Relativitätstheorie wird es eine durchaus plausible Forderung sein, nur solche Variationen in Betracht zu ziehen, die einer wirklichen Variation des Wirkungsintegrals entsprechen, nicht aber einer Variation des Integrationsbereiches.

Es fragt sich nur, wie wir die letzteren, nicht erwünschten Variationen ausschalten sollen. Es sind dies offenbar diejenigen γ_{ik}-Felder, die durch eine blosse unendlich schwache Transformation der Koordinaten hervorgerufen werden. Prinzipiell sind ja beliebige Transformationen zulässig. Nur müssten wir dann auch den Integrationsbereich entsprechend transformieren und bleibt dann das Wirkungsintegral überhaupt unverändert. Die Ausführung einer Koordinatentransformation ist also jedenfalls überflüssig, und, da wir bei unserem ursprüchlichen Integrationsbereich bleiben wollen, dürfen wir ohne Einschränkung der Allgemeinheit Transformationen der Koordinaten und dadurch hervorgerufene γ-Felder a priori ausschliessen.

Wie wir dabei vorzugehen haben, darüber gibt uns die Theorie der unendlich schwachen Felder eindeutigen Aufschluss. Auch hier empfinden wir es als störenden Umstand, dass durch blosse Transformation unendlich schwache Zusatzfelder erzeugt werden können, die offenbar nur als „Scheinfelder" zu betrachten sind, da sie nicht einem tatsächlichen Hineinbringen von Materie entsprechen. W r schalten diese Scheinfelder aus, indem wir dem γ-Feld folgende vektorielle Bedingung vorschreiben:

$$\operatorname{div}\left(\gamma_{ik} - \frac{1}{2}\gamma g_{ik}\right) = 0 \qquad (\gamma = \gamma_s^s) \tag{19}$$

oder ausgeschrieben, wenn wir für eine „tensorielle Differentiation" das Symbol „ϑ" in Anwendung bringen:

$$\frac{\vartheta \gamma_i^s}{\vartheta x_s} - \frac{1}{2} \frac{\vartheta \gamma}{\vartheta x_i} = 0. \tag{20}$$

Wenn diese Bedingung erfüllt ist, so wird es möglich, die Veränderung des Masstensors aus der Veränderung der Krümmungskomponenten, also man kann sagen aus der hineingebrachten Materie, eindeutig zu bestimmen.

Infolge der Bedingung (20) werden tatsächlich die durch blosse Koordinatentransformation erzeugten Scheinfelder ausgeschaltet. Ein solches Scheinfeld lässt sich nämlich in folgender Form schreiben:

$$\gamma_{ik} = \frac{\vartheta \varphi_i}{\vartheta x_k} + \frac{\vartheta \varphi_k}{\vartheta x_i}. \tag{21}$$

Der Umstand, dass diese Felder auf einen beliebig zu wählenden, wenn nur samt allen ersten und zweiten Ableitungen stetigen Vektor φ_i zurückgeführt werden können, entspricht der Tatsache, dass uns bei der Transformation (14) die 4 frei wählbaren Funktionen $f_i(x_1 \ldots x_4)$ zur Verfügung stehen.

Setzen wir die Form (21) in die Gleichung (20) ein, so erhalten wir für den Vektor φ_i folgende Bedingungsgleichung:

$$\Delta \varphi_i - R_i^s \varphi_s = 0. \tag{22}$$

Wir haben es hier mit einem homogenen linearen Differentialausdruck für einen Vektor zu tun. Falls es sich nicht gerade um ein Gebiet handelt, wo „Eigenlösungen" vorhanden sind, dürfen wir voraussetzen, dass diese Gleichung keine von 0 verschiedene Lösung besitzt, die samt allen Ableitungen erster und zweiter Ordnung stetig wäre. Felder von der Form (21) werden also tatsächlich durch die Forderung (20) ausgeschlossen.

Dass andererseits die Bedingung (20) nicht *zu weit* geht, erkennen wir folgendermassen. Ein jedes Variationsfeld γ_{ik} lässt sich als Superposition von 2 Feldern betrachten, derart, dass das eine die Bedingung (2) erfüllt, während, das andere von der Form (21) ist. Die letztere Variation geht aber auf eine blosse Variation des Gebietes hinaus, während die erstere eine tatsächliche Variation der Wirkungsfunktion darstellt.

So haben wir also in der Bedingung (20) eine Mittel in der Hand, die beiden Arten von Variationen: eine wirkliche Variation des Integranden einerseits, eine blosse Variation des Bereiches andererseits, scharf von einander zu trennen. Wollen wir uns auf die wirklichen Variationen beschränken, und die Variation des Gebietes ausschalten, so brauchen wir nur zu fordern, dass die γ_{ik} nicht mehr beliebige Funktionen seien, sondern solche, die der Bedingung (20) Genüge leisten.

Diese Einschränkung, die durchaus im Wesen der Sache begründet liegt, führt zu weittragenden Kensequenzen. Wir haben es jetzt mit einem „Variationsproblem mit Nebenbedingungen" zu tun, dessen Lösung nach den bekannten Methoden der Variationsrechnung unschwer gegeben werden kann. Wir müssen die Nebenbedingung mit einem LAGRANGEschen Faktor multipliziert zum Wirkungsintegral addieren und dann das Problem so behandeln, wie ein „freies" Problem. In unserem Fall, wo die Nebenbedingung von vektorieller Art ist, tritt als LAGRANGEscher Multiplikator ein *Vektor* auf, den wir mit Φ_i bezeichnen wollen.

Unser zu lösendes Variationsproblem können wir also jetzt in folgender Form hinschreiben:

$$\delta I = -\int \left[T_{ik}\, \gamma^{ik} + 2\, \Phi^i \left(\frac{\vartheta \gamma_i^s}{\vartheta x_s} - \frac{1}{2} \frac{\vartheta \gamma}{\vartheta x_i} \right) \right] dv = 0. \qquad (23)$$

Im zweiten Term führen wir in bekannter Weise eine partielle Integration aus. Wir können setzen:

$$\Phi^i \left(\frac{\vartheta \gamma_i^s}{\vartheta x_s} - \frac{1}{2} \frac{\vartheta \gamma}{\vartheta x_i} \right) = \frac{\vartheta}{\vartheta x_s} \left(\Phi^i \gamma_i^s - \frac{1}{2} \gamma\, \Phi^s \right) -$$
$$- \left(\gamma_i^s - \frac{1}{2} \gamma\, \eta_i^s \right) \frac{\vartheta \Phi^i}{\vartheta x_s}. \qquad (24)$$

Die Integration über den ersten Ausdruck lässt sich dann wieder unter Anwendung des GAUSSschen Satzes in ein Berandungsintegral überführen, so dass für das Volumintegral nur der zweite Ausdruck übrig bleibt, wo die γ_{ik}-Grössen nur noch als blosse Faktoren auftreten. Die Einführung in die Formel (23) ergibt:

$$-\int \left[T_{ik} - \left(\frac{\vartheta \Phi_i}{\vartheta x_k} + \frac{\vartheta \Phi_k}{\vartheta x_i} - \frac{\vartheta \Phi^s}{\vartheta x_s} g_{ik} \right) \right] \gamma^{ik}\, dv = 0. \qquad (25)$$

Da jetzt die γ_{ik} bereits frei wählbare Funktionen sind, müssen ihre Koeffizienten überall verschwinden und wir erhalten für den Materietensor folgende Beziehung:

$$T_{ik} = \frac{\vartheta \Phi_i}{\vartheta x_k} + \frac{\vartheta \Phi_k}{\vartheta x_i} - \frac{\vartheta \Phi^s}{\vartheta x_s} g_{ik}. \qquad (26)$$

Der Materietensor verschwindet also nicht mehr, sondern wird auf einen Vektor Φ_i zurückgeführt.

Dass dieser Vektor tatsächlich den Charakter eines Potentials besitzt, erkennen wir, wenn wir die Divergenzgleichung für die Materie bilden, also die Gleichung:

$$\operatorname{div} T_{ik} = 0. \tag{27}$$

Das ergibt nach einer leicht auszuführenden Rechnung folgende Bedingungsgleichung für Φ_i:

$$\Delta \Phi_i - R_i^s \Phi_s = 0. \tag{28}$$

Diese Gleichung ist praktisch nur sehr wenig von der üblichen Gleichung des Vektorpotentials:

$$\Delta \Phi_i = 0 \tag{29}$$

verschieden, weil die Krümmungskomponenten R_{ik} im allgemeinen sehr kleinen Grössen sind.

Nun ist ja die Gleichung (28) dieselbe, wie die früher für den Vektor φ_i gefundene [vrgl. Gl. (22)]. Wir setzten voraus, dass sie keine von 0 verschiedene reguläre Lösung besitzt und schlossen gerade daraus auf das Verschwinden von φ_i. Dieselbe Schlussweise auf den Vektor Φ_i angewandt würde auch sein identisches Verschwinden nach sich ziehen. Wir dürfen aber Φ_i nicht als eine überall reguläre vektorielle Funktion betrachten. Sie muss nur als überall endlich vorausgesetzt werden, wobei aber singuläre Stellen vorhanden sein dürfen, wo Diskontinuitäten in Form eines Sprunges der Komponenten oder deren ersten Ableitungen auftreten. Es ist offensichtlich, wo wir diese Diskontinuitäten des Vektorpotentials suchen werden müssen: an den Begrenzungsflächen der Elektronen und Protonen, die auf diese Weise als *singuläre Stellen des Vektorpotentials* aufzufassen sind.

So gelangen wir an Hand unserer durchaus naturgemäss begründeten Einschränkung in der freien Variation der g_{ik} nicht nur zu einer organischen Einführung eines vektoriellen Potentials in die Einsteinsche Gravitationstheorie, sondern auch zu einer neuen Auffassung über das Wesen der Materie. Die Materie erscheint nicht mehr als singuläre Stelle des metrischen Feldes, vielmehr bleibt der metrische Fundamentaltensor überall endlich und stetig und das gilt sogar auch noch von allen seinen ersten Ableitungen. Die Materie ist überall in volumenhafter Verteilung vorhanden und wird durch das Vektorpotential bestimmt. Die

Grenzen des regulären Feldes, also die Weltschläuche der Elektronen und Protonen, sind an den Sprungstellen des Vektorpotentials zu suchen. Wir haben es da aber zugleich mit *Sprungstellen der Materie* zu tun, da der Materietensor offenbar unstetig wird, wenn in den ersten Ableitungen des Vektorpotentials Unstetigkeiten auftreten. Wir wissen, dass solche Unstetigkeiten in der Tat zulässig sind, ohne, dass dadurch im Masstensor selber, oder in seinen ersten Ableitungen Unstetigkeiten bedingt würden. Es bestehen hier analoge Verhältnisse, wie etwa beim Potential einer homogenen Vollkugel, das an der Berandung samt allen ersten Ableitungen ebenfalls stetig bleibt, trotzdem die Materiedichte hier von einem bestimmten konstanten Wert plötzlich auf Null fällt.

Wichtig ist aber zu bemerken, dass die Unstetigkeiten der Materie nicht beliebig vorgeschrieben werden können, sondern einer bestimmten vektoriellen Bedingung genügen müssen. Es muss der Vektor $T_{is} \nu^s$, wo ν_i die Flächennormale bedeutet, stetig durch eine Diskontinuitätsfläche hindurchgehen.[2] Wenn wir einen Sprung durch die Bezeichnung $[\;]_2^1$ andeuten, so muss also sein:

$$[T_{is}]_2^1 \nu^s = 0 \tag{30}$$

Das bedeutet für den Sprung in den Ableitungen des Vektorpotentials eine ganz bestimmte vektorielle Bedingung, nämlich:

$$\left[\frac{\vartheta \Phi_i}{\vartheta x_s} + \frac{\vartheta \Phi_s}{\vartheta x_i} - \frac{\vartheta \Phi^\sigma}{\vartheta x_\sigma} g_{is}\right]_2^1 \nu^s = 0. \tag{31}$$

Von der Potentialtheorie, beziehungsweise von der Theorie der Integralgleichungen her ist es bekannt, dass eine Potentialfunktion (gleichviel, ob skalarer oder vektorieller Art), im Innern eines regulären Gebietes aus den Randwerten eindeutig bestimmt werden kann. Die Singularitätsflächen der Weltschläuche grenzen nun ein inneres Gebiet vollständig von einem äusseren ab. Wir dürften also von vornherein die Randwerte des Vektorpotentials sowohl für die Innenseite, wie für die Aussenseite frei vorschreiben. (Statt den Randwerten selber können ebenso gut auch die beiderseitigen Ableitungen nach der Normale in Frage kommen). So hätten wir also in jedem Punkt der Singularitätenfläche zwei frei wählbare Vektoren zur Verfügung. Infolge der Randbedingung (31) werden aber diese beiden Vektoren auf einander zurückgeführt,

[2]) s. meine Arbeit: „Flächenhafte Verteilung der Materie in der Einsteinschen Gravitationstheorie", Ann. d. Phys. *74*, 519—540, 1924, S. 536.

so dass nur noch einer frei verfügbar bleibt, während der andere mit Hilfe einer inhomogenen Integralgleichung bereits durch diesen festgelegt wird. Die noch übrig bleibende Freiheit in der Wahl der Randwerte, sowie dem Verlauf der Singularitätsflächen kann durch die Feldgleichungen allein nicht weiter eingeschränkt werden. Hier tritt das „dynamische HAMILTONsche Prinzip" als weiteres regulierendes Prinzip in Wirkung.

Wir wollen noch bemerken, dass die Integration der Differentialgleichung (28), also die Bestimmung des Vektorpotentials aus den Randwerten, insofern nicht ohne weiteres möglich ist, als hierbei die g_{ik} nicht als a priori gegebene Funktionen gelten können, sondern von der Verteilung der Materie abhängen, die ihrerseits wieder erst durch das Vektorpotential bestimmt wird. Auch hier, wie bei allen ähnlichen Problemen der allgemeinen Relativitätstheorie, gelangt man aber zum Ziel durch die Methode der sukzessiven Integration, indem man eine Reihenentwicklung nach einem variablen Parameter $\varkappa$ vornimmt und so eine beliebig starke Modifikation eines gegebenen Grundfeldes auf eine unendlich schwache Modifikation zurückführt.

Das ganze hier behandelte Variationsproblem kann auch noch von einer anderen Seite her in Angriff genommen werden.[3]) Man kann bei der Anwendung des Wirkungsprinzips die *Materie* als den eigentlichen Ursprung des Feldes betrachten und dementsprechend nicht die g_{ik}, sondern die Krümmungskomponenten R_{ik} als die ursprünglich zu variirenden Grössen auffassen, während die Veränderung der g_{ik} durch eine Integration auf die Veränderung der R_{ik} zurückgeführt wird. Hier dient die Nebenbedingung (20), wie bereits bemerkt, dazu, um das Problem eindeutig zu machen. Es sind nun aber auch die Komponenten des Materietensors keine frei wählbaren Funktionen, sie müssen vielmehr der Divergenzbedingung (27) genügen. Auch hier tritt also eine vektorielle Nebenbedingung und dementsprechend ein vektorieller LAGRANGEscher Multiplikator Ψ_i auf. Die Feldgleichungen, die jetzt resultieren, können wieder in die Form (26) gebracht werden, wobei unser früheres Vektorpotential Φ_i mit dem Multiplikator Ψ_i folgendermassen zusammenhängt:

$$\Phi_i = \Delta \Psi_i - R_i^s \Psi_s. \tag{32}$$

[3]) Siehe meine in der „Zeitschrift für Physik" 32, 163—172, 1925 erschienene Arbeit: „Zum Wirkungsprinzip der allgemeinen Relativitätstheorie."

Wir erkennen hier besonders deutlich, dass das Vektorpotential in der Tat keine überall stetige Funktion zu sein braucht. Denn selbst wenn wir Ψ_i samt allen ersten Ableitungen als überall stetig voraussetzen, können in den zweiten Ableitungen, durch welche das Δ bestimmt wird, Diskontinuitäten auftreten.

Auf weitere Folgerungen wollen wir an dieser Stelle nicht eingehen. Die logische Notwendigkeit des Aufbaues lässt aber kaum einen Zweifel darüber übrig, dass das hier organisch in die Einsteinsche Gravitationstheorie eingeführte Vektorpotential mit dem elektromagnetischen Vektorpotential in enger Beziehung steht und dass die vielgesuchte Verschmelzung von Gravitation und Elektromagnetismus auf dem hier entdeckten Wege möglicherweise seiner Verwirklichung entgegengeführt wird.

Frankfurt a. Main, März 1925.